# THE INCLUSION BETWEEN BESOV SPACES AND MODULATION SPACES(Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations)



冨田, 直人

数理解析研究所講究録
1529 巻 2007 年 87-96



# THE INCLUSION BETWEEN BESOV SPACES AND MODULATION SPACES

大阪大学大学院・理学研究科　冨田 直人 (NAOHITO TOMITA)
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY

杉本 充氏 (大阪大学大学院・理学研究科) との共同研究

## 1. はじめに

まず Besov space と modulation space を定義するために, 次の２つの $\xi$-空間での１の分解を考えよう:

$$\begin{aligned}
\eta, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n): \quad & \operatorname{supp}\eta \subset \{|\xi| \le 2\}, \quad \operatorname{supp}\psi \subset \{1/2 \le |\xi| \le 2\}, \\
& \eta(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \psi(\xi/2^j) = 1 \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^n; \\
\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n): \quad & \operatorname{supp}\varphi \subset [-1,1]^n, \\
& \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\xi - k) = 1 \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

$\psi_0 = \eta$, $\psi_j = \psi(\cdot/2^j)$ $(j \ge 1)$, $\varphi_k = \varphi(\cdot - k)$ $(k \in \mathbb{Z}^n)$ と書こう. すると Besov space $B^{p,q}_s(\mathbb{R}^n)$ と modulation space $M^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ はそれぞれ次のノルムを用いて定義される:

$$\|f\|_{B^{p,q}_s} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \|\mathcal{F}^{-1}[\psi_j \hat{f}]\|_{L^p}^q \right)^{1/q},$$

$$\|f\|_{M^{p,q}} = \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi_k \hat{f}]\|_{L^p}^q \right)^{1/q}. \tag{1.1}$$

ここで $\hat{f}$ は $f$ のフーリエ変換を表す. 特に, $M^{\infty,1}(\mathbb{R}^{2n})$ は Sjöstrand のシンボルクラスと呼ばれ, 擬微分作用素の $L^2$-有界性を保証する重要な空間である (Sjöstrand [5], Gröchenig [3]). Modulation space に関する文献として Feichtinger [1], Gröchenig-Heil [4], Tachizawa [7] を挙げておく.

[8] の中で, Toft は興味深い Besov space と modulation space の間の inclusion に関する結果を与えた. 我々は Toft の inclusion に関する結果が最適な結果であることを示した (次節, 定理 2.2 参照). この Toft の結果の最適性を示すために, 我々はまず modulation space でのダイレーションの評価を考えた (次節, 定理 2.1 参照). Gauss 関数を $\varphi$ で表すと ($\varphi(t) = e^{-|t|^2}$), $\|\varphi_\lambda\|_{M^{p,\infty}} \sim \lambda^{-n/p}$ $(0 < \lambda \le 1)$ となる. ここで

$\varphi_\lambda(t)=\varphi(\lambda t)$. しかしながら,

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}e^{ik\cdot t}\psi(t-k)$$

は, $1\le p\le 2$ の時に $\|f_\lambda\|_{M^{p,\infty}}\sim\lambda^{-2n/p}$ $(0<\lambda\le 1)$ となる. ここで $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は $\operatorname{supp}\psi\subset[-1/2,1/2]^n$ と $\psi=1$ on $[-1/4,1,4]^n$ を満たす急減少関数である. つまり, ダイレーションをほどこした時に, そのノルムの $\lambda$ のべきが異なるオーダーになる関数が存在するのである! このように, modulation space でのダイレーションは, $L^p$-空間の場合と異なり複雑な振る舞いをする. 実際, $L^p$-空間の場合には $f\in L^p(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ ならば必ず $\|f_\lambda\|_{L^p}\sim\lambda^{-n/p}$ となるからである.

現在の modulation space に関する研究では, ノルムを短時間フーリエ変換 (窓フーリエ変換) を用いて定義することが多い. $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ の窓 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ に関する短時間フーリエ変換 $V_gf$ は

$$V_gf(x,\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(t)\,\overline{g(t-x)}\,e^{-i\xi\cdot t}\,dt$$

で定義される. ここで積分の意味は超関数の意味である. そして, この短時間フーリエ変換を用いて

$$\|V_gf\|_{L^{p,q}}=\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|V_gf(x,\xi)|^p\,dx\right)^{q/p}d\xi\right\}^{1/q} \tag{1.2}$$

を $M^{p,q}$-ノルムとして用いるのである. [9] の中で, 上で述べた(1.1) と(1.2) のノルムの同値性が述べられているが, $q=\infty$ の場合の証明についてはあまり触れられていない. 筆者はこのノルムの同値性について厳密な証明を与えることは意味があると信じ, 第3節で証明を与える.

## 2. 主結果

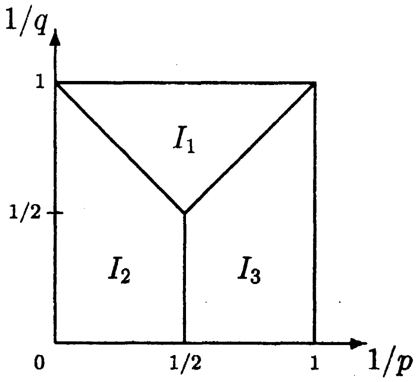
Toft [8] が与えた inclusion に関する結果を述べる. $1\le p,q\le\infty$ とする. Toft は次のインデックスを導入した:

$$\nu_1(p,q)=\max\{0,1/q-\min(1/p,1/p')\},$$
$$\nu_2(p,q)=\min\{0,1/q-\max(1/p,1/p')\}.$$

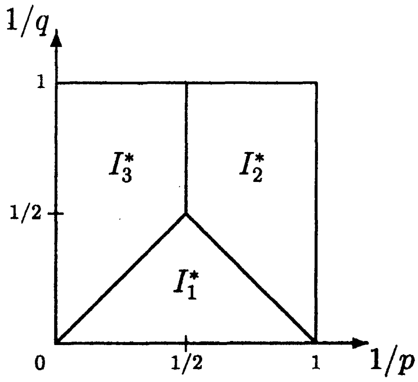
ここで $p'$ は $p$ の共役指数を表す $(1/p+1/p'=1)$. この Toft のインデックスを理解するために, $(1/p,1/q)\in[0,1]\times[0,1]$ を次のように分ける:

$$I_1:\max(1/p,1/p')\le 1/q,\qquad I_1^*:\min(1/p,1/p')\ge 1/q,$$
$$I_2:\max(1/q,1/2)\le 1/p',\qquad I_2^*:\min(1/q,1/2)\ge 1/p',$$
$$I_3:\max(1/q,1/2)\le 1/p,\qquad I_3^*:\min(1/q,1/2)\ge 1/p.$$

図にすると




$0 < \lambda \leq 1$




$\lambda \geq 1$

すると

$$\nu_1(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad (1/p, 1/q) \in I_1^* \\ 1/p + 1/q - 1 & \text{if} \quad (1/p, 1/q) \in I_2^* \\ -1/p + 1/q & \text{if} \quad (1/p, 1/q) \in I_3^* \end{cases}$$
$$\nu_2(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad (1/p, 1/q) \in I_1 \\ 1/p + 1/q - 1 & \text{if} \quad (1/p, 1/q) \in I_2 \\ -1/p + 1/q & \text{if} \quad (1/p, 1/q) \in I_3 \end{cases}$$

に注意しよう. この時, Toft は

$$B^{p,q}_{n\nu_1(p,q)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{p,q}_{n\nu_2(p,q)}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つことを示した. また $1 \leq p = q \leq 2$ の場合には, 左側の inclusion は最適であることを指摘した. つまり,

$$B^{p,p}_{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^{p,p}(\mathbb{R}^n) \implies s_1 \geq n\nu_1(p,p)$$

であることを示した. 同様に $2 \leq p = q \leq \infty$ の場合には, 右側の inclusion は最適であることを指摘した. つまり,

$$M^{p,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^{p,p}_{s_2}(\mathbb{R}^n) \implies s_2 \leq n\nu_2(p,p)$$

であることを示した. 我々はすべての $1 \leq p, q \leq \infty$ に対して, Toft の inclusion に関する結果は上に述べた意味で最適であることを示した (定理 2.2).

Toft の結果の最適性を示すために, 我々はまず modulation space でのダイレーションの性質を調べた. 我々は

$$\mu_1(p,q) = \nu_1(p,q) - 1/p, \qquad \mu_2(p,q) = \nu_2(p,q) - 1/p$$

を導入した. この時,

$$\mu_1(p,q) = \begin{cases} -1/p & \text{if} \quad (1/p, 1/q) \in I_1^* \\ 1/q - 1 & \text{if} \quad (1/p, 1/q) \in I_2^* \\ -2/p + 1/q & \text{if} \quad (1/p, 1/q) \in I_3^* \end{cases}$$

$$\mu_2(p,q) = \begin{cases} -1/p & \text{if} \quad (1/p, 1/q) \in I_1 \\ 1/q - 1 & \text{if} \quad (1/p, 1/q) \in I_2 \\ -2/p + 1/q & \text{if} \quad (1/p, 1/q) \in I_3 \end{cases}$$

に注意しよう. [6] の中で, 我々は次のダイレーションに関する結果を得た:

**定理 2.1.** $1 \le p, q \le \infty$ とする. この時, 次のことが成り立つ:

(1) ある定数 $C > 0$ が存在し

$$\|f_\lambda\|_{M^{p,q}} \le C\lambda^{n\mu_1(p,q)}\|f\|_{M^{p,q}} \quad \textit{for all } f \in M^{p,q}(\mathbb{R}^n) \textit{ and } \lambda \ge 1$$

が成り立つ. 逆に $C > 0$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在し

$$\|f_\lambda\|_{M^{p,q}} \le C\lambda^{\alpha}\|f\|_{M^{p,q}} \quad \textit{for all } f \in M^{p,q}(\mathbb{R}^n) \textit{ and } \lambda \ge 1$$

が成り立つのならば, $\alpha \ge n\mu_1(p,q)$.

(2) ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\|f_\lambda\|_{M^{p,q}} \le C\lambda^{n\mu_2(p,q)}\|f\|_{M^{p,q}} \quad \textit{for all } f \in M^{p,q}(\mathbb{R}^n) \textit{ and } 0 < \lambda \le 1$$

が成り立つ. 逆に $C > 0$ と $\beta \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\|f_\lambda\|_{M^{p,q}} \le C\lambda^{\beta}\|f\|_{M^{p,q}} \quad \textit{for all } f \in M^{p,q}(\mathbb{R}^n) \textit{ and } 0 < \lambda \le 1$$

が成り立つのならば, $\beta \le n\mu_2(p,q)$.

定理 2.1 は, 我々のダイレーションに関する評価が, $\lambda$ のべきに関して最適であることを主張している.

[6] の中で, 我々は Toft の inclusion に関する結果に対して次の最適性を得た:

**定理 2.2.** $1 \le p, q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とする. この時, 次のことが成り立つ:

(1) もしも $B_s^{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つのならば, $s \ge n\nu_1(p,q)$.

(2) もしも $M^{p,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_s^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ が成り立ち, さらに $1 \le p, q < \infty$ であるならば, $s \le n\nu_2(p,q)$.

## 3. $M^{p,q}$-ノルムの同値性について

この節では $M^{p,q}$-ノルムの同値性, つまり

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - k)\hat{f}]\|_{L^p}^q\right)^{1/q} \sim \left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |V_{\Phi^*}f(x,\xi)|^p\,dx\right)^{q/p} d\xi\right\}^{1/q}$$

の厳密な証明を与える．ここで $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は $\operatorname{supp}\varphi \subset [-1,1]^n$ と

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\xi - k) = 1 \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^n$$

をみたし，$\Phi = \mathcal{F}^{-1}\varphi$, $\Phi^*(t) = \overline{\Phi(-t)}$ とする．

**補題 3.1.** $1 \le p \le \infty$ とする．この時，次のことが成り立つ．

(1) $\sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - k)\hat{f}]\|_{L^p} < \infty$ ならば，$\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - \xi)\hat{f}]\|_{L^p}$ は $\xi$-変数に関して連続関数となる．

(2) $\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n} \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - \xi)\hat{f}]\|_{L^p} < \infty$ ならば，$\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - \xi)\hat{f}]\|_{L^p}$ は $\xi$-変数に関して連続関数となる．

*Proof.* まず (1) を考えよう．$\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - \xi)\hat{f}]\|_{L^p}$ の $\xi_0$ での連続性を見よう．$|\xi - \xi_0| < 1/2$ とする．$\varphi$ が 1 の分解を与えているので，$N$ を十分大きくとれば

$$\varphi(\cdot - \xi) = \sum_{|\ell - \xi_0| \le N} \varphi(\cdot - \xi)\,\varphi(\cdot - \ell)$$
$$\varphi(\cdot - \xi_0) = \sum_{|\ell - \xi_0| \le N} \varphi(\cdot - \xi_0)\,\varphi(\cdot - \ell)$$

となる．すると，

$$\begin{aligned}
&\Big| \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - \xi)\hat{f}]\|_{L^p} - \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - \xi_0)\hat{f}]\|_{L^p} \Big| \\
&\le \|\mathcal{F}^{-1}[(\varphi(\cdot - \xi) - \varphi(\cdot - \xi_0))\hat{f}]\|_{L^p} \\
&= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left[ \left( \sum_{|\ell-\xi_0|\le N} (\varphi(\cdot - \xi) - \varphi(\cdot - \xi_0))\,\varphi(\cdot - \ell) \right) \hat{f} \right] \right\|_{L^p} \\
&\le \sum_{|\ell-\xi_0|\le N} \|\mathcal{F}^{-1}[(\varphi(\cdot - \xi) - \varphi(\cdot - \xi_0))\,\varphi(\cdot - \ell)\hat{f}]\|_{L^p} \\
&\le \sum_{|\ell-\xi_0|\le N} \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - \xi) - \varphi(\cdot - \xi_0)]\|_{L^1} \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - \ell)\hat{f}]\|_{L^p} \\
&\le C_N \left( \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - k)\hat{f}]\|_{L^p} \right) \|M_\xi\Phi - M_{\xi_0}\Phi\|_{L^1},
\end{aligned}$$

ここで $\Phi = \mathcal{F}^{-1}\varphi$, $M_\xi\Phi(t) = e^{i\xi\cdot t}\Phi(t)$. よって，$\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - \xi)\hat{f}]\|_{L^p}$ の $\xi$ についての連続性が分かる．

次に (2) を考えよう．$\Phi = \mathcal{F}^{-1}\varphi, \Phi^*(t) = \overline{\Phi(-t)}$ とする．

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - \xi)\hat{f}](x) &= [\mathcal{F}^{-1}(\varphi(\cdot - \xi))] * f(x) = (M_\xi\Phi) * f(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{i\xi\cdot(x-t)}\, \Phi(x - t)\, dt \\
&= e^{ix\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, \overline{\Phi^*(t - x)}\, e^{-i\xi\cdot t} dt = e^{ix\cdot\xi} V_{\Phi^*} f(x, \xi)
\end{aligned}$$

より,

$$\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}=\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi)\|_{L^p}=\|V_{\Phi^*}f\|_{L^{p,\infty}}$$

が分かる. よって, 任意の $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ に対して,

$$\begin{aligned}\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}&=\|V_{\Phi^*}f\|_{L^{p,\infty}}\\&\sim\|V_{\Psi^*}f\|_{L^{p,\infty}}=\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\psi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}\end{aligned}$$

を得る. ここで $\Psi=\mathcal{F}^{-1}\psi,\Psi^*(t)=\overline{\Psi(-t)}$ であり, $\|V_{\Phi^*}f\|_{L^{p,\infty}}\sim\|V_{\Psi^*}f\|_{L^{p,\infty}}$ の同値性については [2, Proposition 11.3.2]. $\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}$ の $\xi_0$ での連続性を示そう. $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を $\psi=1$ on $[-2,2]^n$ を満たす急減少関数とする. すると, $\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}<\infty$ を仮定すると, 上で述べた同値性から $\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\psi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}<\infty$ となる. よって $|\eta-\xi_0|<1/2$ で $\|\mathcal{F}^{-1}[\psi(\cdot-\eta)\hat{f}]\|_{L^p}<\infty$ となる $\eta$ が存在する. $|\xi-\xi_0|<1/2$ なら

$$\xi+[-1,1]^n,\ \xi_0+[-1,1]^n\subset\eta+[-2,2]^n$$

だから

$$\begin{aligned}\varphi(\cdot-\xi)&=\varphi(\cdot-\xi)\,\psi(\cdot-\eta)\\\varphi(\cdot-\xi_0)&=\varphi(\cdot-\xi_0)\,\psi(\cdot-\eta)\end{aligned}$$

が成り立つ. 以上から,

$$\begin{aligned}&\left|\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}-\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi_0)\hat{f}]\|_{L^p}\right|\\&\le\|\mathcal{F}^{-1}[(\varphi(\cdot-\xi)-\varphi(\cdot-\xi_0))\hat{f}]\|_{L^p}\\&=\|\mathcal{F}^{-1}[(\varphi(\cdot-\xi)-\varphi(\cdot-\xi_0))\psi(\cdot-\eta)\hat{f}]\|_{L^p}\\&\le\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)-\varphi(\cdot-\xi_0)]\|_{L^1}\|\mathcal{F}^{-1}[\psi(\cdot-\eta)\hat{f}]\|_{L^p}\\&=\|M_\xi\Phi-M_{\xi_0}\Phi\|_{L^1}\|\mathcal{F}^{-1}[\psi(\cdot-\eta)\hat{f}]\|_{L^p}.\end{aligned}$$

この不等式は, $\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}$ の $\xi_0$ での連続性をあらわしている. □

まずは $q=\infty$ の場合のノルムの同値性を示そう.

**命題 3.2.** $1\le p\le\infty$ とする. この時,

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-k)\hat{f}]\|_{L^p}\sim\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi)\|_{L^p}$$

が成り立つ. ここで $\Phi=\mathcal{F}^{-1}\varphi,\Phi^*(t)=\overline{\Phi(-t)}$.

*Proof.* まずは $\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-k)\hat{f}]\|_{L^p}\le\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi)\|_{L^p}$ となることを見よう. $\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi)\|_{L^p}<\infty$ を仮定する. 補題 3.1 の証明から,

$$|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}](x)|=|V_{\Phi^*}f(x,\xi)|\tag{3.1}$$

が分かる．よって，$\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi)\|_{L^p}<\infty$ ならば $\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}<\infty$ となる．すると補題 3.1 (2) から $\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}$ が $\xi$ に関して連続となることが分かる．よって(3.1) を用いることにより

$$
\begin{aligned}
\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}&=\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}\\
&=\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi)\|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

以上より，

$$
\begin{aligned}
\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-k)\hat{f}]\|_{L^p}&\le\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}\\
&=\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi)\|_{L^p}
\end{aligned}
$$

を得る．

次に $\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi)\|_{L^p}\le C\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-k)\hat{f}]\|_{L^p}$ となる $f$ に無関係な $C>0$ が存在することを見よう．$\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-k)\hat{f}]\|_{L^p}<\infty$ を仮定する．すると補題 3.1 (1) から $\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}$ が $\xi$ に関して連続であることが分かる．よって(3.1) を用いると，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi)\|_{L^p}&=\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}\\
&=\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}=\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi)\|_{L^p}
\end{aligned}
$$

が成り立つことが分かる．$\varphi$ が 1 の分解を与えていることから，

$$
\begin{aligned}
\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi)\|_{L^p}&=\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\hat{f}]\|_{L^p}\\
&=\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\varphi(\cdot-\xi)\left(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\cdot-\ell)\right)\hat{f}\right]\right\|_{L^p}\\
&\le\sum_{|\ell-\xi|\le N}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)\varphi(\cdot-\ell)\hat{f}]\|_{L^p}\\
&\le\sum_{|\ell-\xi|\le N}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\xi)]\|_{L^1}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-\ell)\hat{f}]\|_{L^p}\\
&\le C\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-k)\hat{f}]\|_{L^p},
\end{aligned}
$$

ここで $C$ は $f$ にも $\xi$ にも依らない定数である．以上より，

$$
\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi)\|_{L^p}\le C\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-k)\hat{f}]\|_{L^p}
$$

を得る． □

次に $q<\infty$ の場合を考えよう．

**命題 3.3.** $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$ とする. この時,

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - k)\hat{f}]\|_{L^p}^q\right)^{1/q} \sim \left\{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |V_{\Phi^*} f(x,\xi)|^p \, dx\right)^{q/p} d\xi\right\}^{1/q}$$

が成り立つ. ここで $\Phi = \mathcal{F}^{-1}\varphi, \Phi^*(t) = \overline{\Phi(-t)}$.

*Proof.* まずは

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |V_{\Phi^*} f(x,\xi)|^p \, dx\right)^{q/p} d\xi\right\}^{1/q} \leq C \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - k)\hat{f}]\|_{L^p}^q\right)^{1/q}$$

となる $f$ に依らない $C > 0$ が存在することを示そう. $\xi \in k + [-1/2, 1/2]^n$ に対し, (3.1) と $\varphi$ が 1 の分解を与えていることを用いると,

$$\begin{aligned}
|V_{\Phi^*} f(x,\xi)| &= |\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - \xi)\hat{f}](x)| \\
&\leq \sum_{|\ell|\leq N} |\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - \xi)\varphi(\cdot - (k+\ell))\hat{f}](x)| \\
&= \sum_{|\ell|\leq N} |(M_\xi \Phi) * (\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - (k+\ell))\hat{f}])(x)|
\end{aligned}$$

が分かる. ここで $N$ は $\xi$ と $k$ に依らない. よって,

$$\begin{aligned}
&\left\{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |V_{\Phi^*} f(x,\xi)|^p \, dx\right)^{q/p} d\xi\right\}^{1/q} \\
&= \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{k+[-1/2,1/2]^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |V_{\Phi^*} f(x,\xi)|^p \, dx\right)^{q/p} d\xi\right\}^{1/q} \\
&\leq \sum_{|\ell|\leq N} \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{k+[-1/2,1/2]^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(M_\xi \Phi) * (\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - (k+\ell))\hat{f}])(x)|^p \, dx\right)^{q/p} d\xi\right\}^{1/q} \\
&= \sum_{|\ell|\leq N} \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{k+[-1/2,1/2]^n} \|(M_\xi \Phi) * (\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - (k+\ell))\hat{f}])\|_{L^p}^q d\xi\right\}^{1/q} \\
&\leq \sum_{|\ell|\leq N} \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{k+[-1/2,1/2]^n} \left(\|M_\xi \Phi\|_{L^1} \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - (k+\ell))\hat{f}])\|_{L^p}\right)^q d\xi\right\}^{1/q} \\
&= \|\Phi\|_{L^1} \sum_{|\ell|\leq N} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - (k+\ell))\hat{f}])\|_{L^p}^q\right)^{1/q} \\
&= C\|\Phi\|_{L^1} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot - k)\hat{f}])\|_{L^p}^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

次に

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-k)\hat{f}]\|_{L^p}^q\right)^{1/q} \le C\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|V_{\Phi^*}f(x,\xi)|^p\,dx\right)^{q/p}d\xi\right\}^{1/q}$$

を示そう. $\xi\in k+[-1/2,1/2]^n$ に対し, (3.1) と $\varphi$ が 1 の分解を与えていることを用いると,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-k)\hat{f}]\|_{L^p} &\le \sum_{|\ell|\le N}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-k)\varphi(\cdot-(\xi+\ell))\hat{f}]\|_{L^p}\\
&= \sum_{|\ell|\le N}\|(M_k\Phi)*(\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-(\xi+\ell))\hat{f}])\|_{L^p}\\
&\le \sum_{|\ell|\le N}\|M_k\Phi\|_{L^1}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-(\xi+\ell))\hat{f}]\|_{L^p}\\
&= \|\Phi\|_{L^1}\sum_{|\ell|\le N}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi+\ell)\|_{L^p}
\end{aligned}$$

が分かる. ここで $N$ は $\xi$ と $k$ に依らないことに注意しよう. よって,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-k)\hat{f}]\|_{L^p}^q\right)^{1/q}\\
&= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_{k+[-1/2,1/2]^n}\|\mathcal{F}^{-1}[\varphi(\cdot-k)\hat{f}]\|_{L^p}^q\,d\xi\right)^{1/q}\\
&\le \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_{k+[-1/2,1/2]^n}\left(\|\Phi\|_{L^1}\sum_{|\ell|\le N}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi+\ell)\|_{L^p}\right)^q d\xi\right\}^{1/q}\\
&= \|\Phi\|_{L^1}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{|\ell|\le N}\|V_{\Phi^*}f(\cdot,\xi+\ell)\|_{L^p}\right)^q d\xi\right\}^{1/q}\\
&\le \|\Phi\|_{L^1}\sum_{|\ell|\le N}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|V_{\Phi^*}f(x,\xi+\ell)|^p\,dx\right)^{q/p}d\xi\right\}^{1/q}\\
&= C\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|V_{\Phi^*}f(x,\xi)|^p\,dx\right)^{q/p}d\xi\right\}^{1/q}.
\end{aligned}$$

□

## REFERENCES


[1] H.G. Feichtinger, Modulation spaces: Looking back and ahead, Sampl. Theory Signal Image Process. 5 (2006), 109-140.

[2] K. Gröchenig, Foundations of Time-Frequency Analysis, Birkhäuser, Boston, 2001.

[3] K. Gröchenig, Time-Frequency analysis of Sjöstrand's class, to appear in Rev. Mat. Iberoam.

[4] K. Gröchenig and C. Heil, Modulation spaces and pseudodifferential operators, Integral Equations Operator Theory 34 (1999), 439-457.

[5] J. Sjöstrand, An algebra of pseudodifferential operators, Math. Res. L. 1 (1994), 185-192.

[6] M. Sugimoto and N. Tomita, The dilation property of modulation spaces and their inclusion relation with Besov spaces, submitted.

[7] K. Tachizawa, The boundedness of pseudodifferential operators on modulation spaces, Math. Nachr. 168 (1994), 263-277.

[8] J. Toft, Continuity properties for modulation spaces, with applications to pseudo-differential calculus-I, J. Funct. Anal. 207 (2004), 399-429.

[9] H. Triebel, Modulation spaces on the Euclidean $n$-spaces, Z. Anal. Anwendungen 2 (1983), 443-457.